$\boxed{1}$

(1)

解法 **1**：数Ⅲ

$f(\theta)=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\left(\dfrac{\pi}{12}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\right)$ とすると，

$$f'(\theta)=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

よって，$f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(\theta)$	$f\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\downarrow$	2	$\uparrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ について

$\tan\dfrac{\pi}{6}=\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$，　$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，　$\tan^2\dfrac{\pi}{12}+2\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{12}-1=0$

これと $\tan\dfrac{\pi}{12}>0$ より，　$\tan\dfrac{\pi}{12}=-\sqrt{3}+2$　　$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=4$

よって，　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}<f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

ゆえに，　$2\le f(\theta)\le 4$，すなわち $2\le t\le 4$　　・・・(答)

解法 **2**：数Ⅱ

$$t=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{\sin 2\theta}{2}}=\frac{2}{\sin 2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{12}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$ より，　$\dfrac{\pi}{6}\le 2\theta\le\dfrac{2}{3}\pi$　　$\therefore \dfrac{1}{2}\le\sin 2\theta\le 1$

よって，　$2\le\dfrac{2}{\sin 2\theta}\le 4$，すなわち $2\le t\le 4$　　・・・(答)

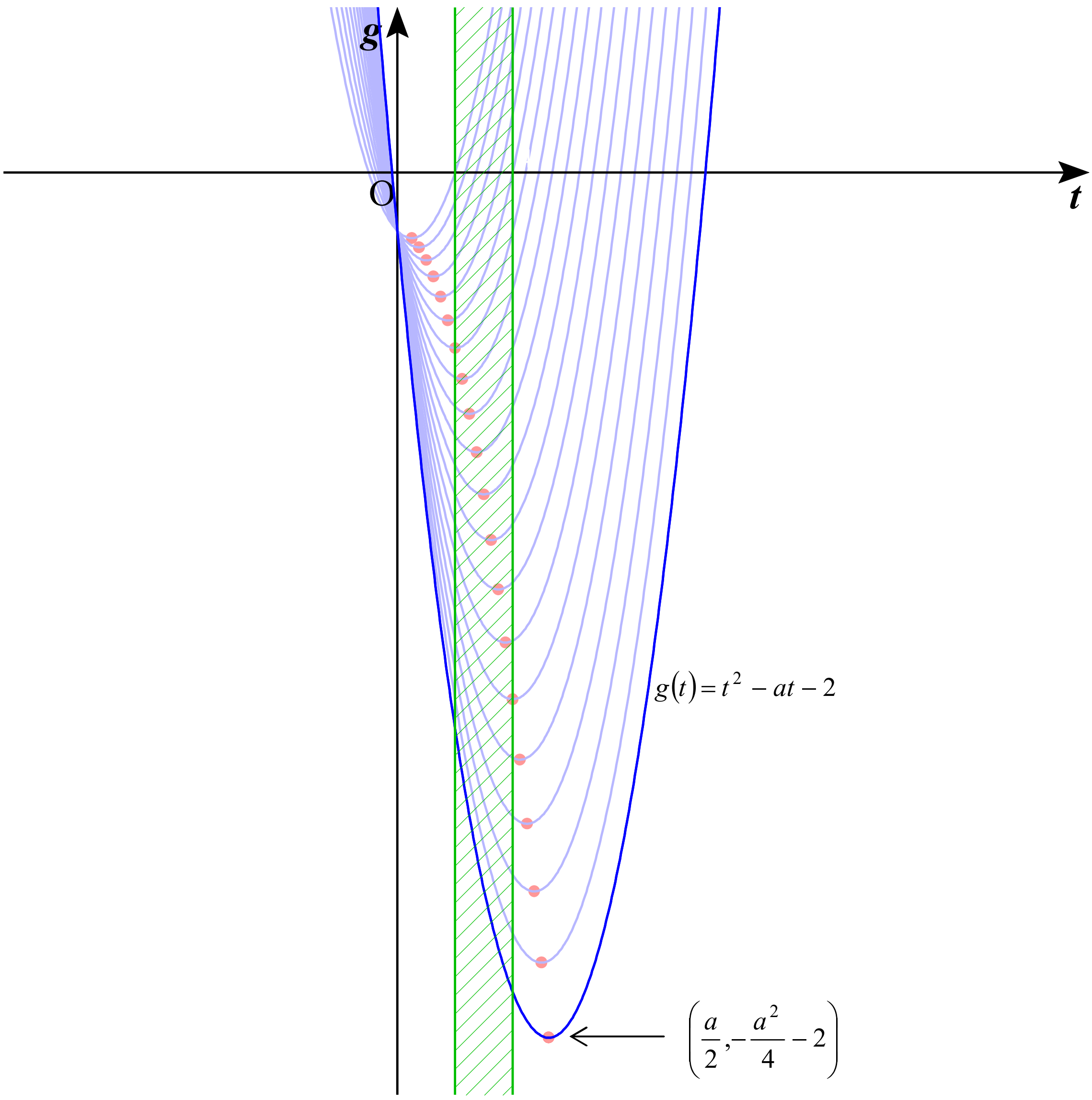
(2)

$$y=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2-2-a\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

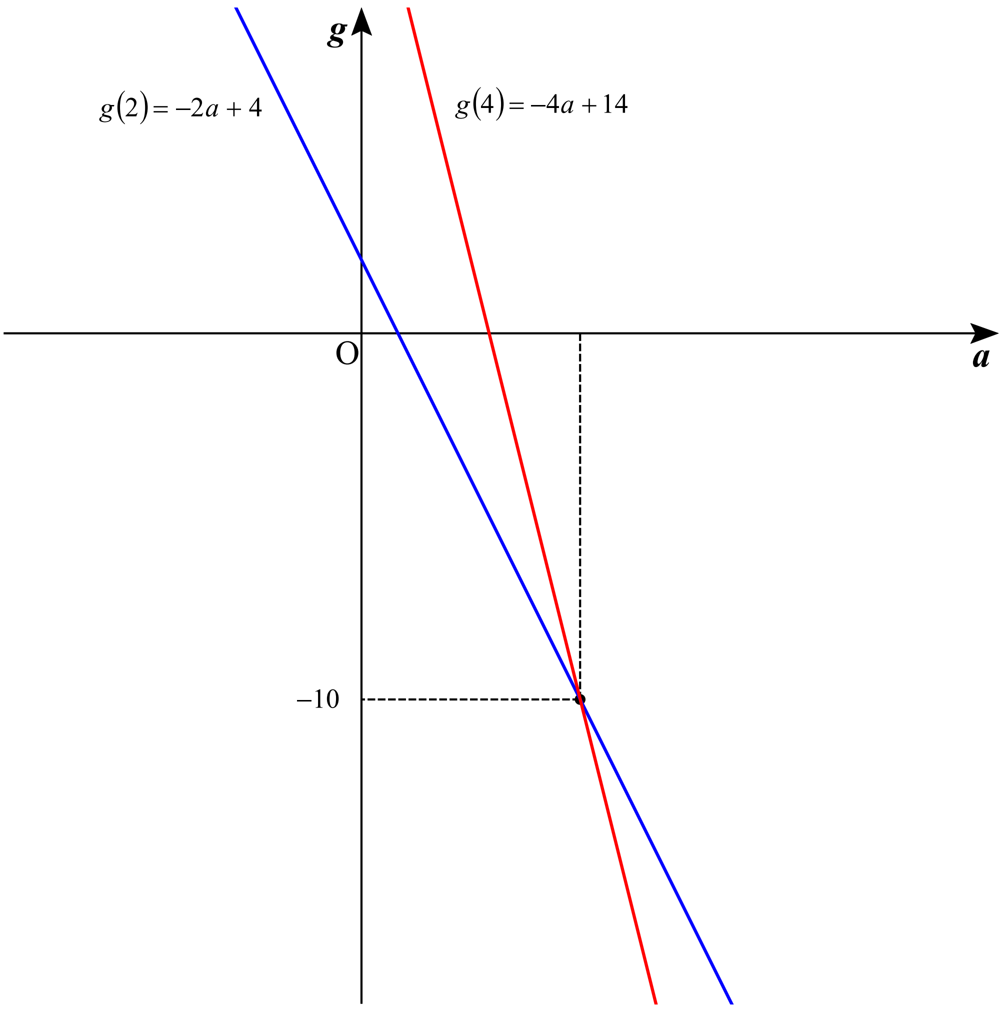
より，

$$g(t)=t^2-2-at$$
$$=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-2$$

とおくと，$2\leq t\leq 4$ より，$g(2)=-2a+4$，$g\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}-2$，$g(4)=-4a+14$



$g(t)$ は下に凸のグラフだから，最大値をとるのは，$t=2$ あるいは $t=4$ のときである。
よって，$g(2)=-2a+4$ と $g(4)=-4a+14$ の大きい方が $g(t)$ の最大値となる。
下図より，最大値は,
$0<a\leq 6$ のとき，$g(4)=-4a+14$　・・・①
$6\leq a$ のとき，$g(2)=-2a+2$　・・・②



また，$g(t)$ の最小値は，

$2 \le \dfrac{a}{2} \le 4$ のとき，すなわち $4 \le a \le 8$ のとき，$g\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} - 2$

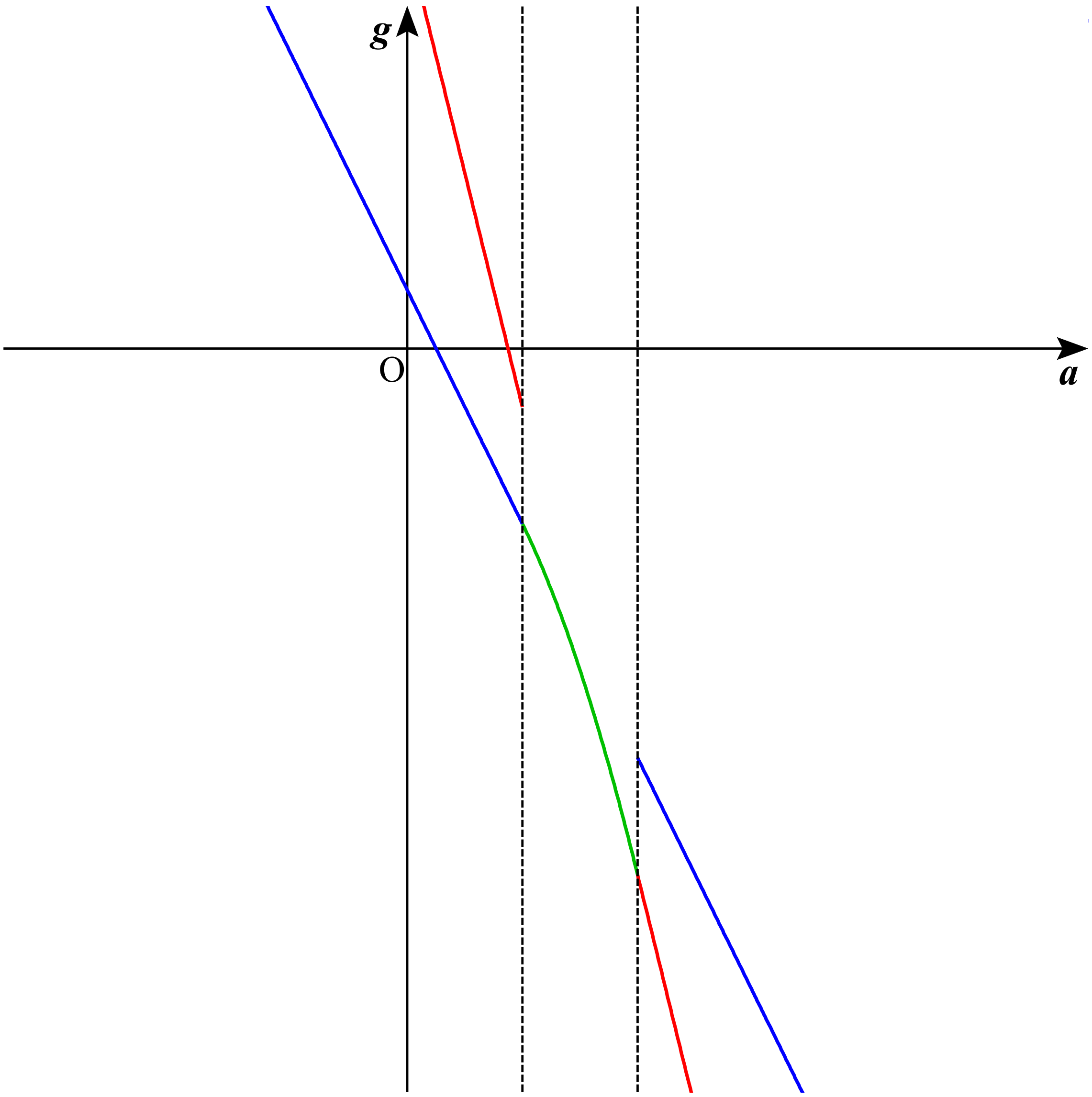
$a \le 4$ または $8 \le a$ のときは，$g(2) = -2a + 4$ と $g(4) = -4a + 14$ の小さい方である。

よって，下図より，最小値は，

$0 < a \le 4$ のとき，$g(2) = -2a + 2$　・・・③

$4 \le a \le 8$ のとき，$g\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} - 2$　・・・④

$8 \le a$ のとき，$g(4) = -4a + 14$　・・・⑤



①から⑤より,

$0 < a \leq 4$ のとき $g(2) \leq y \leq g(4)$，すなわち $-2a+2 \leq y \leq -4a+14$

$4 \leq a \leq 6$ のとき $g\left(\frac{a}{2}\right) \leq y \leq g(4)$，すなわち $-\frac{a^2}{4}-2 \leq y \leq -4a+14$

$6 \leq a \leq 8$ のとき $g\left(\frac{a}{2}\right) \leq y \leq g(2)$，すなわち $-\frac{a^2}{4}-2 \leq y \leq -2a+2$

$8 \leq a$ のとき $g(4) \leq y \leq g(2)$，すなわち $-4a+14 \leq y \leq -2a+2$

$\boxed{2}$

(1)

P_n について

n 秒後に状態 A であるためには，状態 A であり続けなければならないから，

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ・・・①$$

Q_n について

n 秒後に状態 B であるためには， k 秒後 $(1 \leq k \leq n)$ に状態 B になった後，

状態 B であり続けなければならないから，

$$Q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 3^k\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= 2\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad ・・・②$$

また， $P_n + Q_n + R_n = 1$ 　・・・③

①，②，③より，

$$R_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad ・・・(答)$$

(2)

$Q_m = Q_n \ (m < n)$と仮定すると，

$3\left(\frac{1}{2}\right)^m - 3\left(\frac{1}{3}\right)^m = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ より，$\frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ $\therefore \frac{3^n 2^{n-m} - 2^n 3^{n-m}}{3^n \cdot 2^n} = \frac{3^n - 2^n}{3^n \cdot 2^n}$

よって，$\frac{3^n\left(2^{n-m} - 1\right)}{3^n \cdot 2^n} = \frac{2^n\left(3^{n-m} - 1\right)}{3^n \cdot 2^n}$

ところが，

左辺の分子3^nと$2^{n-m} - 1$はともに奇数だから，左辺の分子は奇数

右辺の分子2^nと$3^{n-m} - 1$はともに偶数だから，右辺の分子は偶数

となり，等号が成立しない。

よって，$Q_m = Q_n \ (m < n)$とした仮定は偽である。

ゆえに，$Q_m \neq Q_n$

同様に，$Q_m \neq Q_n \ (m > n)$

(3)

$P_m = Q_n \ (m < n)$と仮定すると，

$\left(\frac{1}{2}\right)^m = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ より，$\frac{3^n 2^{n-m}}{3^n \cdot 2^n} = \frac{3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n}{3^n \cdot 2^n}$ $\therefore \frac{3^{n-1} \cdot 2^{n-m}}{3^{n-1} \cdot 2^n} = \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} \cdot 2^n}$

ところが左辺の分子は偶数，右辺の分子は奇数だから，等号が成立しない。

よって，この仮定は偽である。

同様に，$P_m \neq Q_n \ (m > n)$

$P_m = Q_n \ (m = n)$と仮定すると，

$\left(\frac{1}{2}\right)^m = 3\left(\frac{1}{2}\right)^m - 3\left(\frac{1}{3}\right)^m$ より，$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$

よって，$n = m = 1$のとき，$P_m = Q_n$が成り立つ。

$\frac{3^n 2^{n-m}}{3^n \cdot 2^n} = \frac{3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n}{3^n \cdot 2^n}$ $\therefore \frac{3^{n-1} \cdot 2^{n-m}}{3^{n-1} \cdot 2^n} = \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} \cdot 2^n}$ $3^m = 3 \cdot 3^m 2^{m-n} - 3 \cdot 3^{m-n} 2^m$

$\therefore 3^{n-1} \cdot 2^{n-m} = 3^n - 2^n$

ところが左辺は偶数，右辺は奇数だから，等号が成立しない。

よって，この仮定は偽である。

3

$f(x)=ax^2+bx+c$ （a,b,c は整数）とおくと，
条件より，
$f(1)=a+b+c=15$ ・・・①
$f(2)=4a+2b+c=33$ ・・・②
$a>0$，$b\geq 0$，$c\geq 0$ ・・・③
①，②より，
$b=18-3a$ ・・・④
$c=2a-3$ ・・・⑤
③，④，⑤より，$a>0$，$18-3a\geq 0$，$2a-3\geq 0$
よって，①，②，③を満たす a の値は，$a=2,3,4,5,6$ ・・・⑥

$$
\begin{aligned}
f(1)+\cdots+f(n)&=a\sum_{k=1}^{n}k^2+b\sum_{k=1}^{n}k+cn\\
&=\frac{an(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{bn(n+1)}{2}+cn\\
&=n\cdot\frac{a(n+1)(2n+1)+3b(n+1)+6c}{6}\\
&=n\cdot\frac{a(n+1)(2n+1)+3(18-3a)(n+1)+6(2a-3)}{6}\\
&=n\cdot\frac{a(2n^2-6n+4)+54n+36}{6}\\
&=n\left\{\frac{a(n+1)(n-3)}{3}+9n+6\right\}
\end{aligned}
$$

$f(1)+\cdots+f(n)$ が任意の自然数 n で割り切れるには，a が 3 の倍数であればよい。
よって，⑥より，$a=3,6$
これと④，⑤より，$(a,b,c)=(3,9,3),(6,0,9)$
ゆえに，$f(x)=3x^2+6x+3$ または $f(x)=6x^2+9$ ・・・(答)

$\boxed{4}$

(1)

$f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$　（$0\leq x\leq\frac{11}{6}\pi$）より，

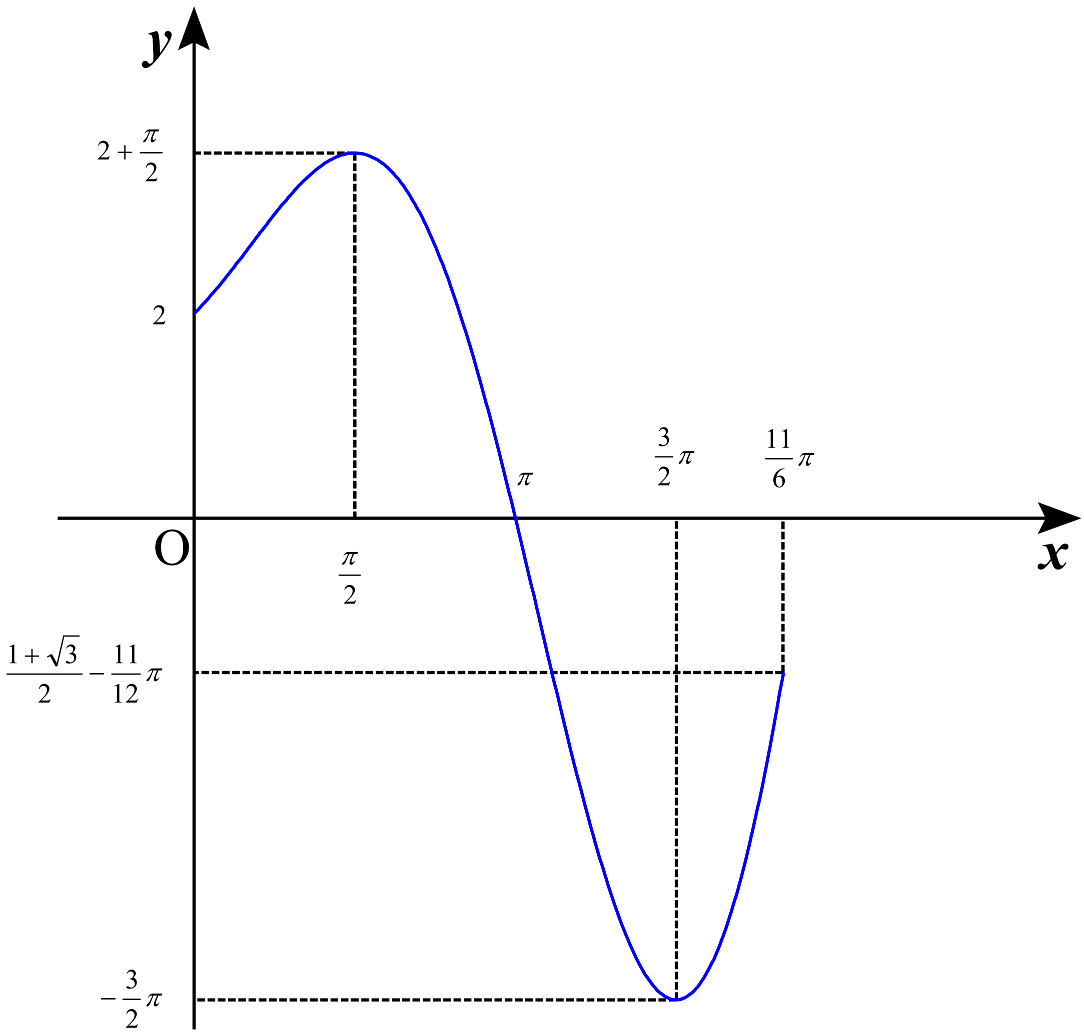
$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cos x$
$\quad=(x+1)\cos x$

よって，$0\leq x\leq\frac{11}{6}\pi$ において，$x=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ のとき $f'(x)=0$ となるから，

$f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{11}{6}\pi$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	2	$\uparrow$	$2+\frac{\pi}{2}$	$\downarrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\uparrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{11}{12}\pi$

また，$f(\pi)=0$



(2)

$$h(x)=\frac{g(x)-|g(x)|}{2}=\begin{cases}0 & (g(x)\geq 0)\\ g(x) & (g(x)<0)\end{cases}\quad\cdot\cdot\cdot ①$$

$$g(x)=(\pi-x)\left\{x^2-2(\pi+1)x+(\pi+1)^2\right\}$$
$$=-(x-\pi)\{x-(\pi+1)\}^2$$

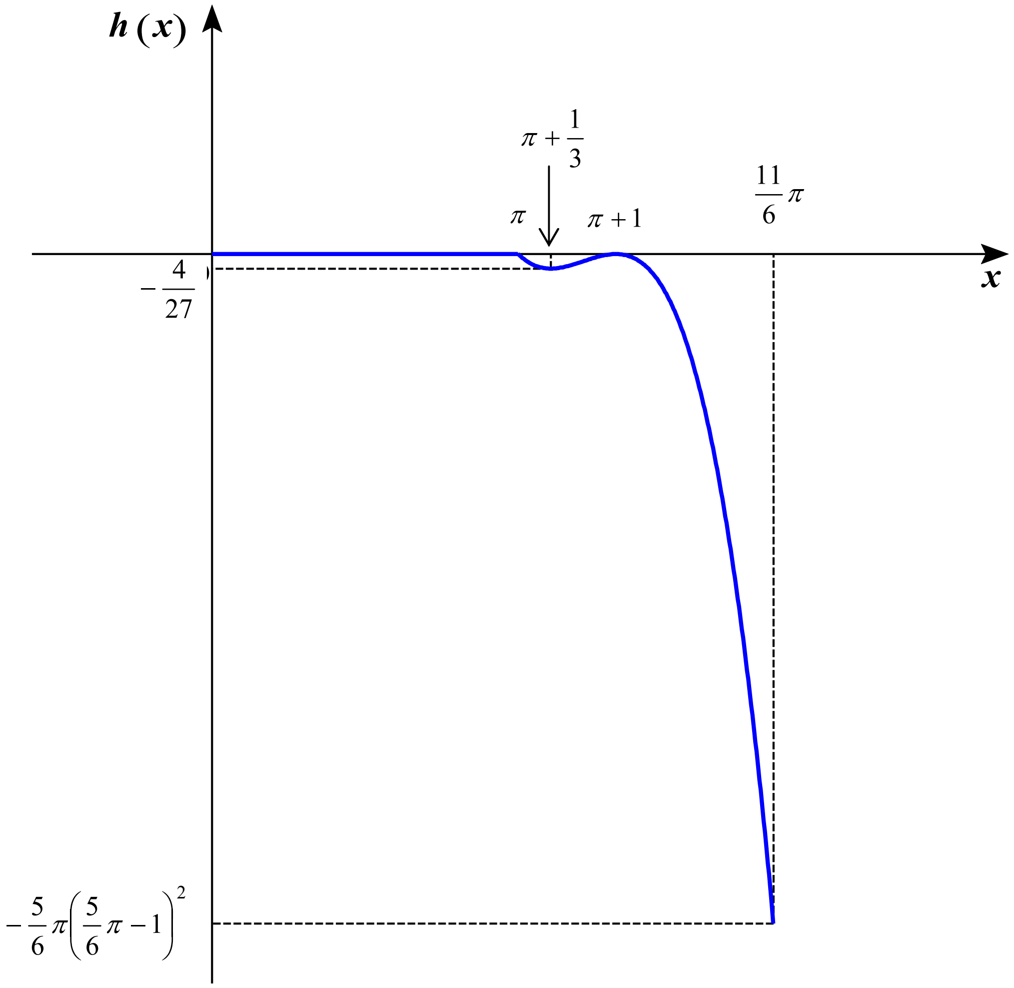
および，$g'(x)=-\{x-(\pi+1)\}\{3x-(3\pi+1)\}$ より，$g(x)$ の増減は下表のようになる。

x	0		π		$\pi+\frac{1}{3}$		$\pi+1$		$\frac{11}{6}\pi$
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	正	正	0	$\downarrow$	$-\frac{4}{27}$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$-\frac{5}{6}\pi\left(\frac{5}{6}\pi-1\right)^2$

よって，$g(x)$ の増減表と①より，

$0\leq x\leq\pi$ のとき：$h(x)=0$

$\pi\leq x\leq\frac{11}{6}\pi$ のとき：$h(x)=g(x)$

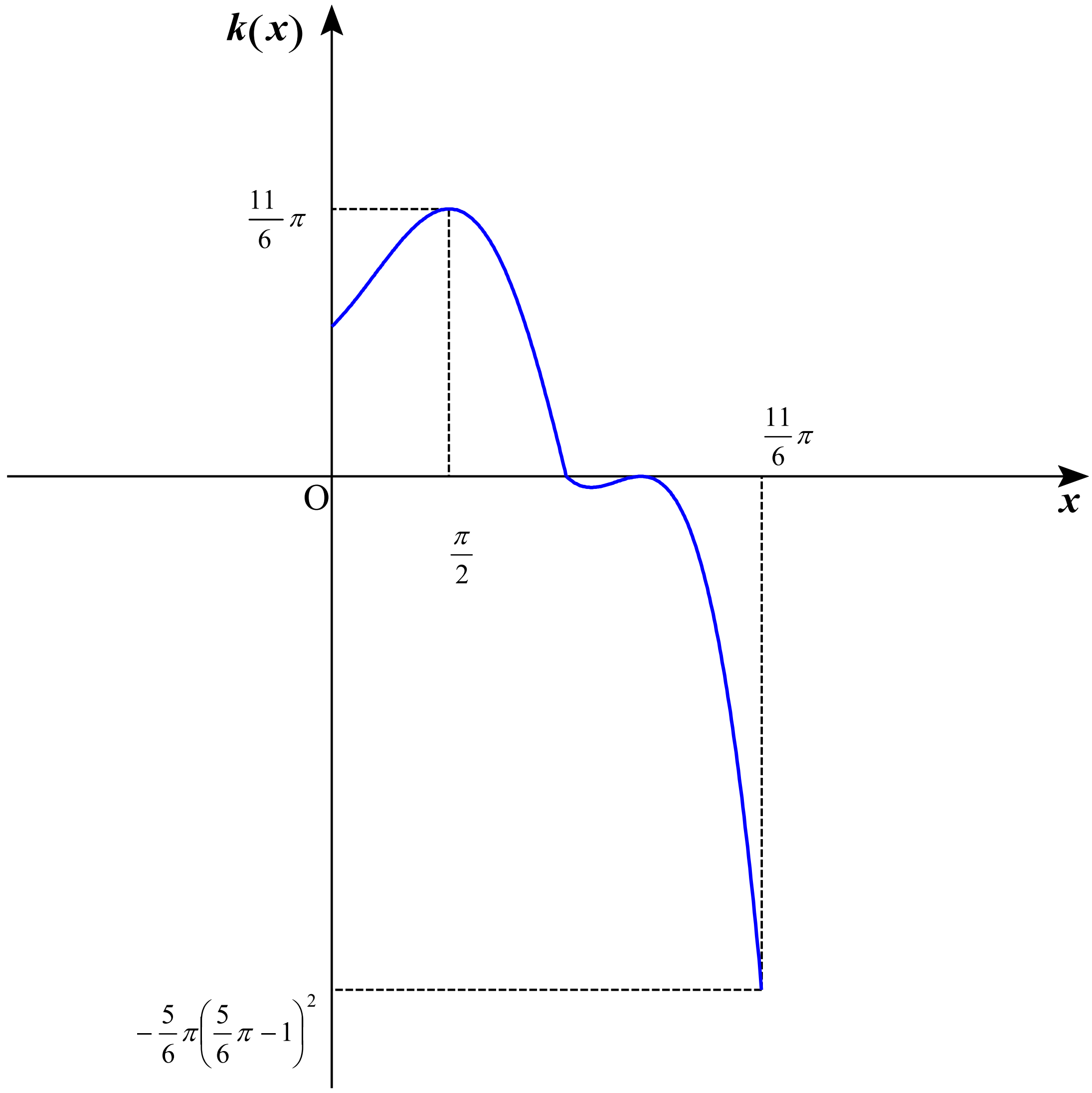


(3)

(1)，(2)の結果を踏まえて，$k(x)$について整理すると，下表のようになる。

x	0		π		$\frac{11}{6}\pi$
$\frac{f(x)+\lvert f(x)\rvert}{2}$	$f(x)$	$f(x)$	0	0	0
$h(x)$	0	0	0	$g(x)$	$g(x)$
$k(x)$	$f(x)$	$f(x)$	0	$g(x)$	$g(x)$

よって，グラフの概形は下図のようになる。



以上より，

$x=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\frac{\pi}{2}+2$

$x=\frac{11}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{5}{6}\pi\left(\frac{5}{6}\pi-1\right)^2$